Задаци за вежбу 1

задаци за домаћи обележени су *

1. * Нека је $a \in [0,4]$. Доказати да је $[0,1]$ инваријантан скуп динамичког система индукованог логистичким пресликавањем $\lambda_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Нека је $f : X \to X$ реверзибилан динамички систем и $A \subseteq X$. Доказати да је A потпуно инваријантан[1] ако и само ако је f-инваријантан и f^{-1}-инваријантан.

3. * Нека је задат динамички систем $\tau : [0,1] \to [0,1]$, где је $\tau(x) = 2\min\{x, 1-x\}$.
   а) Скицирати график од τ, τ^2 и τ^3.
   б) Доказати да је τ конјугован са $\lambda_4|_{[0,1]}$.
   в) Доказати да је $(\tau, [0,1])$ транзитиван динамички систем.

4. Нека је $\rho_\theta : S^1 \to S^1$ ротација за угао $\theta \in \mathbb{R}$.
   а) Доказати да је
   $$\operatorname{per}(\rho_\theta) = \begin{cases} S^1 & \theta \in \mathbb{Q} \\ \emptyset & \theta \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
   б) Доказати да је (ρ_θ, S^1) транзитиван за $\theta \notin \mathbb{Q}$.

5. Нека је (X,d) метрички простор са бар једном изолованом тачком и $f : X \to X$ транзитиван динамички систем. Доказати да је тада X коначан скуп и да $\mathcal{O}_f(x) = X$ за свако $x \in X$.

6. * Нека је (X,d) метрички простор и $f : X \to X$ контракција[2] таква да је динамички систем (f,X) транзитиван. Доказати да је тада (f,X) минималан.

7. * Нека је (X,d) метрички простор без изолованих тачака и $f : X \to X$. Доказати да је (f,X) транзитиван динамички систем ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ и свако $x, y \in X$ постоје $k, n \in \mathbb{N}$ и $z \in X$ тако да
   $$d(f^k(z), x) < \varepsilon \quad \text{и} \quad d(f^n(z), y) < \varepsilon.$$

8. * Нека је Φ транзитиван ток на метричком простору (X,d). Доказати да је X повезан.

---

[1] Скуп $A \subseteq X$ је f-*потпуно инваријантан* ако $f(A) = A$.
[2] Пресликавање $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ се назива *контракцијом* ако је 1-Липшицово.